

XXV OLIMPIADA COLOMBIANA DE MATEMÁTICAS y VII OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMÁTICAS

PRUEBA SELECTIVA
NIVEL SUPERIOR
Abril 4 de 2006

Instrucciones e Información

Generales.

1. No abra este cuadernillo hasta que su profesor lo indique.
2. Antes de empezar la prueba, llene completamente sus datos personales en la hoja de respuestas. Las instrucciones respectivas se encuentran en la página 4 de este cuadernillo. Si usted no indica el grado que cursa, el computador no podrá determinar si usted es de primer nivel, nivel intermedio o nivel superior y no podrá corregir su prueba.
3. La prueba consta de 12 preguntas para ser contestadas en 120 minutos. La respuesta siempre es un número entero entre 0 y 999 inclusive. **Todas las respuestas deben tener tres cifras**, es decir: si obtuvo como solución 5, debe marcar 005; si obtuvo 28 debe marcar 028. Escriba las respuestas en las casillas correspondientes a cada pregunta (cada pregunta tiene un recuadro rotulado con su número). Luego se debe llenar completamente el círculo correspondiente a cada dígito de la respuesta en la columna respectiva. Cada respuesta tendrá como calificación 1 ó 0, de tal manera que su calificación será un número entero de 0 a 12. No se da crédito por respuestas parciales ni se penaliza por respuestas incorrectas.
4. Las figuras son apenas una ayuda visual, no están dibujadas a escala.
5. Para desarrollar la prueba, puede usarse papel para operaciones, lápiz, borrador, regla, etc. No puede usar calculadoras, libros, apuntes, ni ninguna otra ayuda.

Integridad de la Competencia.

Para asegurar la integridad de la competencia, cuyos objetivos incluyen promover el estudio de la matemática e identificar a estudiantes sobresalientes en matemáticas, el Comité Organizador de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas se reserva el derecho de reexaminar a cualquier estudiante antes de aceptar su puntaje como oficial.

1. Carlos es futbolista. Él cumple años antes de iniciar la temporada de fútbol, que se realiza anualmente. A los 18 años jugó su primera temporada en el fútbol profesional y ese año anotó diez goles. En cada uno de los años siguientes, Carlos siempre marcó cinco goles más que en la temporada anterior. ¿A que edad anotó su gol número 500?
2. Se tiene el triángulo rectángulo ABC , con ángulo recto en A y $\angle ABC = 60^\circ$. Se traza la altura del triángulo que pasa por A y corta al lado BC en D . Luego se contruye el rectángulo $ADCE$, tal y como muestra la figura.

Si M es el punto de corte de las diagonales del rectángulo $ADCE$ y el segmento EC mide 57cm, calcule el perímetro del triángulo ADM , en centímetros.

3. Ramón va a la tienda y el tendero le ofrece 100 sobres del álbum del mundial. Los sobres vienen de tres tipos; el primero sólo trae cuatro láminas, el segundo cinco láminas y el tercero seis láminas. El tendero le advierte que debe seleccionar sus cien sobres de modo que la cantidad de sobres que tienen seis láminas no exceda ni a la cantidad de sobres de cinco láminas ni a la de cuatro. Bajo esta condición, ¿cuál es el máximo número de láminas que Ramón puede recibir?
4. Sean p y q enteros. Si el máximo común divisor de p y q es 1 y se cumple que

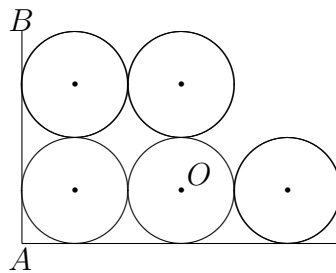
$$\frac{2p + 3q}{p} = \frac{11}{3},$$

halle el valor de $p^2 + q^2$.

5. ¿Cuántos números de tres dígitos son divisibles por la cifra de sus unidades?
6. Si se escribe hoy la edad de Alejandro y a continuación la edad de Camila, se obtiene un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si se hiciera lo mismo dentro de 11 años, se tendría de nuevo otro cuadrado perfecto. Encuentre la suma de las edades actuales de Alejandro y Camila.
7. Se sabe que A es un conjunto de m enteros consecutivos que suman $2m$ y B es un conjunto de $2m$ enteros consecutivos que suman m . Si la diferencia entre los elementos más grandes de A y B es de 99, encontrar el valor de m .

8. Un número de cuatro dígitos distintos $abcd$ es “*alternado*” si se cumple que $a < b > c < d$. ¿Cuántos números *alternados* existen, con todos sus dígitos distintos de 0?
9. Encuentre el mayor entero positivo n tal que $n + 10$ divide a $n^3 + 100$.
10. Cinco discos de radio 15cm, tangentes entre ellos y a dos líneas perpendiculares que son tangentes a las circunferencias se encuentran como muestra la figura. Se traza una línea recta a través del punto O , de forma que a cada lado de la recta, las regiones cubiertas por los discos tengan igual área. Esta línea corta a la recta AB en un punto C .

Encuentre la medida en centímetros del segmento AC .



11. Una compañía exportadora de café vende su producto en bolsas cuyo peso en libras es una potencia de dos (es decir, en bolsas de 1, 2, 4, 8, 16 libras, etc). Se quiere hacer un pedido a la empresa, por un total de 2006 libras de café, especificando cuantas bolsas de cada tipo se desean, de manera que se pidan máximo dos bolsas de cada tipo. ¿De cuántas formas distintas se puede realizar el pedido?
12. Se tiene un heptágono regular $ABCDEFG$ de lado 500. Hallar el valor de

$$\frac{AC \cdot AD}{AC + AD}$$

INSTRUCCIONES PARA LLENAR LA HOJA DE RESPUESTAS

Al llenar la información en la hoja de respuestas USE ÚNICAMENTE LAPÍZ NÚMERO 2. De otro modo la máquina lectora no podrá leer su hoja. No doble ni arrugue la hoja de respuestas.

DATOS PERSONALES.

Antes de comenzar la prueba llene todos sus datos en la hoja de respuestas: en el LADO 1 escriba su nombre completo (APELLIDO y NOMBRE) y el nombre completo de su colegio, ciudad y departamento. En el LADO 2 escriba su dirección personal (DIRECCIÓN), ciudad (CIUDAD), departamento (DEPARTAMENTO), teléfono (TELÉFONO), grado (GRADO), edad (EDAD) y sexo (SEXO). Luego sombree los círculos apropiados en cada columna. Al sombrear un círculo asegúrese de llenarlo completamente con marca negra en lápiz.

Recuerde que si usted no marca correctamente su grado el computador no sabrá si usted es de primer nivel, de nivel intermedio o de nivel superior y no podrá calificar su prueba.

No olvide FIRMAR su hoja de respuestas en el cuadro correspondiente (LADO 1).

RESPUESTAS

Mientras desarrolle la prueba, escriba el resultado que obtiene para cada pregunta en el mismo temario. Luego en los últimos 10 minutos de la prueba, pase sus resultados a la hoja de respuestas en el LADO 1. **Todas las respuestas deben tener tres cifras**, es decir: si obtuvo como solución 5, debe marcar 005; si obtuvo 28 debe marcar 028. Escriba las respuestas en las casillas correspondientes a cada pregunta (cada pregunta tiene un recuadro rotulado con su número). Luego rellene los círculos apropiados en la columna inferior de cada casilla. **El no marcar los círculos equivale a no responder la pregunta.** Si se equivoca o cambia de opinión sobre alguna respuesta, debe borrar la marca anterior totalmente y marcar la nueva respuesta.