



XXVII Olimpiada Colombiana
de Matemáticas y
IX Olimpiada Bolivariana
de Matemáticas



Nivel Superior - Primer Día

Mayo 22 de 2008

A los estudiantes: Se prohíbe revelar el contenido de este examen a otras personas, en especial por medios electrónicos, hasta que el texto sea oficialmente publicado en la página de internet de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas (<http://olimpia.uan.edu.co>). Este cuestionario DEBE ser regresado a los organizadores con su firma en él.

1. **[7 puntos]** Camilo tiene un cubo de lado 3 formado por 27 cubitos de lado 1. Camilo decide marcar varios de los cubitos, de tal manera que sea imposible formar una línea de tres cubitos consecutivos sin marcar en el cubo original. ¿Cuál es el mínimo de cubos que marca Camilo? Justifique su respuesta.
2. **[7 puntos]** En un triángulo ABC sea H el pie de la altura trazada desde el vértice A . Sea ℓ_1 una recta perpendicular al segmento AB a través del punto B y sea ℓ_2 una recta perpendicular al segmento AC a través del punto C . Se denominan E y F las intersecciones de la recta AH con las rectas ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Sea Y el punto de intersección de ℓ_2 con una recta paralela a BC por E y sea Z el punto de intersección de ℓ_2 con una paralela a BC por F . Determine condiciones necesarias y suficientes para que los puntos A, Y, Z sean colineales.
3. Para cada entero positivo n se define la función $S(n)$ como la suma de todos los números del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ que no comparten con n divisores comunes mayores que 1.
 - a) **[2 puntos]** Demuestre que $2S(n)$ no puede ser el cuadrado de un entero positivo.
 - b) **[5 puntos]** Dados m, n enteros positivos, con n impar, demuestre que la ecuación $2S(x) = y^n$ tiene al menos una solución (x, y) en enteros positivos de forma que $m \mid x$.