



XXIII Olimpiada Colombiana
de Matemáticas y
V Olimpiada Bolivariana
de Matemáticas



Nivel Superior - Primer Día

Junio 3 de 2004

A los estudiantes: Se prohíbe revelar el contenido de este examen a otras personas, en especial por medios electrónicos, hasta que el texto sea oficialmente publicado en la página de internet de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas (<http://olimpia.uan.edu.co>).

Este cuestionario DEBE ser regresado a los organizadores con su firma en él.

1. Sean a y b números enteros positivos. Estos números se llaman *amigos* si el producto ab es un cuadrado perfecto. Demostrar que:
 - a) [2 puntos] Si a es amigo de b y b es amigo de c , entonces a es amigo de c .
 - b) [3 puntos] Si a es amigo de b , entonces a es amigo de d , donde d es el máximo común divisor de a y b .
 - c) [2 puntos] Si x es el menor número que es amigo de a , x divide a todos los amigos de a .
2. [7 puntos] Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias que se intersectan en los puntos A y B . La tangente común más próxima al punto A toca las circunferencias Γ_1 y Γ_2 en los puntos C y D respectivamente. Una paralela a la línea CD se traza a través de A , cortando a Γ_1 y Γ_2 en los puntos E y F respectivamente. Llámense G e I las intersecciones de la recta DA con Γ_1 y BC respectivamente (G diferente de A). Análogamente sean H y J las intersecciones de CA con Γ_2 y BD respectivamente. Por último, defínense K y L como las intersecciones de CG con BE y de DH con BF respectivamente. Demuestre que los puntos I, J, K, L están sobre una línea paralela a CD .
3. [7 puntos] En una Olimpiada de Matemáticas, participan varios estudiantes de varios países. En la fiesta de integración de la olimpiada, los estudiantes del mismo país no se saludan, pues ya se conocen entre ellos, y pueden o no saludar a los participantes de otros países, a los cuales no conocen, una única vez.

Se sabe que a la fiesta asistieron t estudiantes, de m países diferentes. Si C es el número total de saludos que hubo durante la fiesta, demostrar que

$$C \leq t^2 \left(\frac{m-1}{2m} \right).$$

Nota: El número de estudiantes que lleva cada país no es limitado, y no tiene porque ser el mismo para dos países diferentes.