

# Solucionario

## Ronda final Nivel intermedio

XXIII OCM y V OBM

1 de junio de 2004

1. **Primera solución.** No siempre es posible. Se va a demostrar que si la lista empieza con todos los números iguales a 1, no es posible lograr este objetivo. Si se numeran las casillas de izquierda a derecha, al ver las casillas que quedan con los números 3, 6, 9, siempre que se realice una modificación, se le suma 1 a exactamente una de estas casillas. Por lo tanto, si al final se realizan  $n$  modificaciones, la suma de los números en estas tres casillas será  $n+3$ , pues empieza en 3 y aumenta 1 por cada modificación. Si al final todos los números son múltiplos de 4, es necesario que  $n+3$  sea múltiplo de 4.

Pero mediante un razonamiento similar, mirando las casillas 1, 4, 7 y 10, se tiene que en cada modificación también se aumenta 1 a exactamente una de estas casillas, y para que al final todos los números sean múltiplos de 4 sería necesario que  $n+4$  sea múltiplo de 4. Estas dos condiciones no se pueden tener simultáneamente, pues  $n+3$  y  $n+4$  no pueden ser múltiplos de 4 al mismo tiempo, y se puede concluir que con esta configuración inicial, nunca se tendrá que todos los números sean múltiplos de 4.

**Segunda solución.** Es claro que el orden en que se aplican los pasos del proceso no afecta el llegar a una posible solución, ya que siempre se está sumando el mismo valor y además el orden de los números en la lista no cambia. Así, es posible suponer que la lista está escrita de izquierda a derecha y considerar que el primer término es el que se encuentra en el extremo izquierdo y el último el del extremo derecho.

Para demostrar que hay casos en los que no es posible que todos los números sean múltiplos de cuatro, se usará un contraejemplo. Suponga que se tiene la lista  $(4,4,4,4,4,4,4,4,3)$ .

Ya que  $x_1 = 4$  es un múltiplo de 4, se debe sumar a ese término  $4r_1$ , siendo  $r_1$  un entero no negativo. Como solamente hay una forma de escoger a  $x_1$  dentro de un conjunto de tres números consecutivos de la lista, las modificaciones deben convertir la lista en

$$4r_1 + 4, 4r_1 + 4, 4r_1 + 4, \dots, 3.$$

Siguiendo el proceso con  $x_2$ , tomando en cuenta que el orden del proceso es indiferente a los resultados, es posible asumir que solamente restan los pasos en los que este número se modifica a la vez que los términos tercero y cuarto de la lista. Para esta modificación entonces se debe sumar  $4r_2$  para obtener como resultado  $4r_2 + 4r_1 + 4$ . La lista queda entonces de la forma

$$4r_1 + 4, 4r_2 + 4r_1 + 4, 4r_2 + 4r_1 + 4, 4r_2 + 4, \dots, 3.$$

Se puede continuar así hasta que se haya sumado a los términos séptimo, octavo y noveno. En este momento la lista es

$$4r_1 + 4, 4r_2 + 4r_1 + 4, 4r_3 + 4r_2 + 4r_1 + 4, 4r_4 + 4r_3 + 4r_2 + 4, \dots, 4r_7 + 4, 3.$$

Ahora, cualquier modificación que se haga a la lista para cambiar el valor del décimo término, actualmente igual a 3, cambiaría el valor de los términos octavo y noveno, que para mantener su condición de múltiplos de 4 deben ser cambiados solamente sumando un múltiplo de 4. Así, el único cambio que será permitido para el décimo término de la lista será añadir un múltiplo de 4, con lo que se obtiene un número de la forma  $4q + 3$ , claramente no divisible por 4.

## 2. Primera solución.

- a) Si  $a$  es amigo de  $b$  y  $b$  es amigo de  $c$ , entonces los números  $ab$  y  $bc$  son cuadrados perfectos, así que se puede decir que  $ab = m^2$  y  $bc = n^2$ , para  $m$  y  $n$  enteros positivos. Con esto se puede concluir que

$$ac = \frac{(ab)(bc)}{b^2} = \left(\frac{mn}{b}\right)^2$$

es un cuadrado perfecto.

- b) Sea  $d$  el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ . Se tiene entonces que  $a/d$  es primo relativo con  $b/d$ . Como  $a$  y  $b$  son amigos,  $ab = (a/d)(b/d)d^2$  es un cuadrado perfecto, y por lo tanto  $(a/d)(b/d)$  debe ser un cuadrado perfecto. Como el producto de dos primos relativos es cuadrado perfecto, cada uno de ellos debe ser cuadrado perfecto, y con esto se tiene que  $ad = (a/d)d^2$  es un cuadrado perfecto, por ser producto de cuadrados perfectos.
- c) Supóngase que  $x$  es el menor número que es amigo de  $a$ , pero  $x$  no divide a todos los amigos de  $a$ . Si  $b$  es un amigo de  $a$  que no es divisible por  $x$ , el máximo común divisor de  $b$  y  $x$  será un número  $c$  menor que  $x$ , que por la parte (b) es amigo de  $b$ . Por la parte (a) del problema se sabe que  $c$  debe ser un amigo de  $a$  menor que  $x$ , y esto es una contradicción, pues  $x$  es el menor número amigo de  $a$ . Esta resultó de suponer que  $x$  no divide a  $b$ , y por lo tanto se puede concluir que  $x$  divide a todos los amigos de  $a$ .

## Segunda solución.

- a) Si  $a$  es amigo de  $b$  y  $b$  es amigo de  $c$ , entonces los números primos que dividen a  $a$  y que tienen un exponente impar serán los mismos primos que dividen a  $b$  y que tienen un exponente impar en la factorización de  $b$ . Por esta razón serán a su vez los mismos primos que dividen a  $c$  con un exponente impar. Así, como los números primos que dividen a  $a$  y a  $c$  con exponente impar son los mismos, al hacer la multiplicación estos exponentes se suman y se llega a que todos los exponentes de los primos en el producto  $ac$  son pares, por lo que  $ac$  es un cuadrado perfecto.
- b) Sea  $d$  el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ . Como  $a$  es amigo de  $b$ , los números primos que dividen a cada uno de estos números con exponente impar son los mismos, por lo que al calcular  $d$  se tendrá un exponente impar para estos primos también en  $d$ . Al hacer la multiplicación de  $a$  y  $d$  se tendrá entonces que los números primos con exponente impar son los mismos en los dos factores, por lo que sus exponentes se suman y el resultado de la multiplicación tiene exponente par en cada uno de sus primos, por lo que es un cuadrado perfecto.
- c) El menor número amigo de  $a$ , que se denominará  $x$ , será aquel que tenga en su factorización prima solamente los primos que tienen exponente impar en  $a$ , cada uno de ellos con exponente 1, para que al hacer la multiplicación se tenga exponente par en cada factor primo y el número sea un cuadrado perfecto. Ahora, los números que son amigos de  $a$  se caracterizan por tener un exponente impar sólo en los primos que dividen a  $a$  con exponente impar. Así, todos los amigos de  $a$  son divisibles por cada uno de los primos que dividen a  $a$  con exponente impar y por lo tanto también divisibles por su producto, que es justamente el número  $x$  descrito anteriormente.

3. **Solución.** Los triángulos  $ABD$  y  $ADC$  tienen la misma altura (la altura desde  $A$  al lado  $BC$ ) por lo que la razón entre sus áreas es la razón entre sus bases ( $BD$  y  $DC$ ),  $\frac{1}{2}$  según los datos del problema. Se llega entonces a que  $2(ABD) = (ADC)$ . Un proceso análogo en cada uno de los lados lleva a  $2(BCE) = (BEA)$  y  $2(CAF) = (CFB)$ . Sumando las tres expresiones y separando en regiones se obtiene:

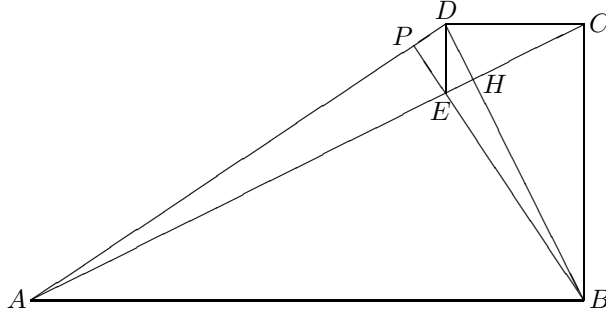
$$4((AFY) + (BDZ) + (CEX)) + 2((AYXE) + (BZYF) + (CXZD)) = (AFY) + (BDZ) + (CEX) + 2((AYXE) + (BZYF) + (CXZD)) + 3(XYZ).$$

Eliminando términos comunes a cada lado de la igualdad se llega a

$$3(XYZ) = 3((AFY) + (BDZ) + (CEX)),$$

que al simplificar por 3 es la igualdad pedida en el problema.

4. **Primera solución.** Para un seguimiento más sencillo de la solución, tómesese como guía la siguiente figura:



Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ , en un triángulo rectángulo se tiene que la suma de los ángulos agudos es  $90^\circ$ . Por lo tanto, se puede ver que

$$\angle HAB = 90^\circ - \angle HBA = \angle HBC = \angle HCD = \angle HDE.$$

De modo que  $\angle HAB = \angle HDE$ , y por tener dos ángulos iguales, los triángulos  $HAB$  y  $HDE$  son semejantes.

De la semejanza se tiene que

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HD}{HE}, \text{ entonces } \frac{HA}{HD} = \frac{HB}{HE},$$

y por lo tanto los triángulos  $HAD$  y  $HBE$  son semejantes. Se tiene que los ángulos  $HAD$  y  $HBE$  son iguales. Comparando los ángulos en los triángulos  $APE$  y  $BHE$ , que resultan semejantes, se tiene que  $\angle APE = \angle BHE = 90^\circ$ , como se quería demostrar.

**Segunda solución.** Se tiene que  $DE$  es perpendicular a  $AB$ , pues es paralela a  $BC$ , y  $AH$  es perpendicular a  $BD$ , pues  $BH$  es la altura de  $B$  hasta  $AC$ . Por lo tanto  $DE$  y  $AH$  son alturas del triángulo  $ABD$ , así que  $E$  es el ortocentro de  $ABD$ , y  $BE$  debe ser altura, por lo que  $BE$  es perpendicular a  $AD$ .

5. **Solución.** Estúdiese detalladamente la pirámide. Como el cubo es de lado par, se tiene que el centro tiene coordenadas enteras  $(n, n, n)$ . Si se mira lo que nos resulta al intersectar la pirámide con planos de coordenadas enteras paralelos a la base, se ve que siempre se tienen cuadrados tales que todos son de distinto tamaño, tienen vértices con coordenadas enteras, y lado par, pues el centro de los cuadrados tiene siempre coordenadas enteras, ya que queda justo debajo del centro del cubo. Como en un cuadrado de lado  $k$  hay  $(k+1)^2$  puntos con coordenadas enteras, se puede concluir que el número de vértices con coordenadas enteras en la pirámide es  $1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2$ .

Se debe verificar ahora que esta suma coincide con la fórmula dada, y para esto se procederá por inducción. Cuando  $n = 1$ , se tiene que

$$\frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3} = 10 = 1 + 3^2,$$

y con esto se verifica el primer caso. Ahora supóngase que

$$1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(4n^2 + 8n + 3)}{3}.$$

Sumando  $(2n + 3)^2$  a ambos lados, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 &= \frac{(n + 1)(4n^2 + 8n + 3)}{3} + (2n + 3)^2 \\ &= \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 + 12n^2 + 36n + 27}{3} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 47n + 30}{3} \\ &= \frac{(n + 2)(4n^2 + 16n + 15)}{3} = \frac{(n + 2)(4(n + 1)^2 + 8(n + 1) + 3)}{3}, \end{aligned}$$

que coincide con la expresión para  $n + 1$ , con lo que se completa el paso inductivo.

## 6. Solución.

- a) Existen muchos números 7-separables, que se pueden construir agregando dígitos adecuadamente al comienzo de un número. Si por ejemplo se toma el número 55, que no es separable pues ni 48 ni 62 son separables, pero agregando 1111 al comienzo del número, con lo que se obtiene el número 7-separable 111155, ya que  $1 + 1 + 5 = 1 + 1 + 5$ ,  $1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8$  y  $1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$ . Para ver que hay infinitos números 7-separables, basta agregar otros dos dígitos uno al comienzo de este número, y se obtienen infinitos números 7-separables en la secuencia 111155, 11111155, 111111155,...
- b) Para que un número sea separable, es necesario que la suma de sus dígitos sea par. Si al sumarle o restarle 7 a este número tan solo cambian las unidades, las unidades cambiarán de paridad, y el número no podría ser 7-separable. Así que para que un número sea 7-separable, debe cambiar de dígito en las decenas al sumarle o restarle 7, y por lo tanto su último dígito es 3, 4, 5 o 6.

Además, vease que al sumar o restar 7, cada uno de los dígitos del número inicial quedan igual o cambian de paridad (aumentan 7 o disminuyen 3 en las unidades, o aumentan 1 o pasan de 9 a 0 en las otras posiciones), así que es necesario que al sumar o restar 7 cambie una cantidad par de dígitos. Considerese primero el caso en el cual sólo cambian los dos últimos dígitos. Si  $a$  y  $b$  son los últimos dígitos de  $n$  (con  $b$  en las unidades), se tendrá que los últimos dígitos de  $n - 7$  son  $(a - 1)$  y  $(b + 3)$ , y los últimos dígitos de  $n + 7$  serán  $(a + 1)$  y  $(b - 3)$ . Los otros dígitos de  $n$  permanecerán iguales en  $n - 7$  y  $n + 7$ . Si  $n$  sea separable, al repartir los dígitos en dos grupos pueden presentarse dos casos: que  $a$  y  $b$  queden en el mismo grupo, o que queden en distinto grupo. En todo caso, la diferencia que se forme debe ser

balanceada con los otros dígitos. Por lo tanto, con los primeros dígitos se debe poder formar

$$a + b \text{ o } |a - b|. \quad (1)$$

Mediante un razonamiento análogo en  $n - 7$ , se tiene que esta misma cifra es

$$a + b + 2 \text{ o } |a - b - 4|, \quad (2)$$

y por el lado de  $n + 7$ , esta cifra sería

$$a + b - 2 \text{ o } |a - b + 4|. \quad (3)$$

Para formar un número 7-separable de 4 dígitos, la suma o la diferencia de los últimos dígitos debe nivelarse con los dos primeros dígitos, ya sea con la suma o con la diferencia, y sólo tienen dos posibles resultados. Por lo tanto dos de los términos en (1), (2) o (3) deben ser iguales.

Como no hay dos sumas iguales, podrían haber dos restas iguales, o una suma igual a una resta. Si hay dos restas iguales, se generan 3 casos:

- a. Si  $|a - b - 4| = |a - b|$ , entonces  $a - b - 4 = -a + b$ ,  $a - b = 2$ , y se tendrá que  $|a - b + 4| = 6$ , y  $a + b - 2 = (b + 2) + b - 2 \geq 6 \neq 2$  (recordando que  $b \geq 3$ ).
- b. Si  $|a - b - 4| = |a - b + 4|$ , entonces  $a - b = 0$ ,  $|a - b - 4| = 4$  y se tendrá que  $|a - b| = 0$ , y  $a + b = 2b \geq 6 \neq 4$ .
- c. Si  $|a - b| = |a - b + 4|$ , entonces  $a - b = -a + b - 4$ ,  $a - b = -2$ , y se tendrá que  $|a - b - 4| = 6$ , y  $a + b + 2 = (b - 2) + b + 2 \geq 6 \neq 2$ .

De estos casos se tiene que podrían haber 2 términos iguales a 2 y el otro es mínimo 6 (casos a, c), de donde el menor 7-separable de estos casos comenzaría por 24 (pues su suma es 6 y su diferencia es 4), como por ejemplo 2413 o 2464, o (caso b) dos términos iguales a 4, y el otro es 0 (y genera el número 2233), o mayor que 6, donde el menor número posible es 1533.

Si se tiene una suma igual a una resta, aparecen 6 casos, que se pueden verificar directamente:

- Si  $|a - b - 4| = a + b$ ,  $b = -2$  (que no es posible) o  $a = 2$ , que genera el número 1423.
- Si  $|a - b - 4| = a + b - 2$ ,  $b = -1$  (que no es posible) o  $a = 3$ , que genera el número 1533.
- Si  $|a - b| = a + b + 2$ ,  $b = -1$  o  $a = -1$ , que no es posible.
- Si  $|a - b| = a + b - 2$ ,  $b = 1$  (que no es posible) o  $a = 1$ , que genera el número 2413.
- Si  $|a - b + 4| = a + b + 2$ ,  $b = 1$  o  $a = -3$ , que no es posible.
- Si  $|a - b + 4| = a + b$ ,  $b = 2$  o  $a = -2$ , que no es posible.

En el caso en que cambien más de dos dígitos al sumar o restar 7, se ve que se deben modificar al menos 4 dígitos, y no se generan soluciones menores a 1423, pues la única posibilidad es pasar de novecientos a mil, pero no hay separables entre 993 y 999. Con todo esto, se puede concluir que el menor número 7-separable es 1423.